Varianta 065

Subiectul I

a) $\left|\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i\right|=1$.

b) $OA=1$.

c) Pentru $n\in \mathbf{N}$, A_n aparține cercului $\Leftrightarrow$ $x_n^2+y_n^2=1$, adevărat.

d) Pentru $n\in \mathbf{N}$, toate punctele A_n de la subpunctul **c)** au coordonatele raționale şi aparțin cercului.

e) $V_{ABCD}=3$.

f) $\begin{cases} a=1 \\ b=-5 \end{cases}$.

Subiectul II

1.

a) Se verifică prin calcul direct.

b) Se foloseşte punctul **a)**.

c) $g(1)=0$.

d) $x\in\{-3, 0\}$.

e) $x_1^2+x_2^2+x_3^2=49$.

2.

a) $f'(x)=-\frac{6x}{(x^2+4)(x^2+1)}$, $\forall\, x\in \mathbf{R}$.

b) $\int_0^1 f'(x)\,dx=\ln\frac{5}{8}$.

c) Evident, folosind semnul funcției f'.

d) $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=-\frac{3}{5}$.

e) Din tabelul de variație rezultă că $\forall\, x\in \mathbf{R}$, $0< f(x)\le \ln 4$.

Subiectul III

a) $\det(A)=1$ şi $\operatorname{rang}(A)=3$.

b) $A^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi $A^3=A^2\cdot A=I_3$.

c) Din **b)**, $A^{-1}=A^2$.

d) Se arată prin calcul direct.

e) Considerăm $P, Q \in C(A)$. Din **d)** rezultă că $PA = AP$ şi $QA = AQ$.

Avem $(P+Q)\cdot A = PA + QA = AP + AQ = A\cdot(P+Q)$, deci $P+Q \in C(A)$.

şi $(P\cdot Q)\cdot A = P\cdot(QA) = P\cdot(AQ) = (PA)\cdot Q = (AP)\cdot Q = A\cdot(PQ)$, deci $P\cdot Q \in C(A)$.

f) Se arată uşor că dacă $Y \in C(A)$ şi $Y^2 = O_3$ atunci şi $Y = O_3$ (1)

Fie $X \in C(A)$ pentru care $f(X) = X^6 = O_3$. $X \in C(A) \overset{e)}{\Rightarrow} X^3 \in C(A)$.

Folosind afirmația (1) rezultă imediat că $X^6 = O_3 \Rightarrow X = O_3$.

g) Avem $f(A) = f(I_3) = I_3$, deci f nu este injectivă.

Fie $B = -I_3 \in C(A)$. Se deduce că $\forall X \in C(A)$, $f(X) = X^6 \neq B$, deci f nu este surjectivă.

Subiectul IV

a) Se demonstrează prin calcul direct.

Deducem că există $k \in \mathbf{R}$ astfel încât $\forall x \in \mathbf{R}$, $f(x) = k$.

b) $f(0) = \frac{1}{2}$, deci $k = \frac{1}{2}$, de unde rezultă $f\left(\frac{\pi}{2006}\right) = \frac{1}{2}$.

c) $\int_0^{2006\pi} f(x)\,dx = 1003\pi$.

d) Avem $\forall n \in \mathbf{N}$ $n \geq 1$, $a_{n+1} = a_n \cdot \cos\frac{a}{2^{n+1}}$ şi se demonstrează prin inducție că pentru orice $a \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ şi $n \in \mathbf{N}^*$, avem $a_n = \frac{1}{2^n}\cdot\frac{\sin a}{\sin\frac{a}{2^n}}$.

e) Calcul direct.

f) Pentru $a \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\frac{\sin a}{\sin\frac{a}{2^n}} = \frac{\sin a}{a}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{a}{2^n}}{\sin\frac{a}{2^n}} = \frac{\sin a}{a}$.

g) $b_1 = \sqrt{\frac{1}{2}}$ şi $b_n = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}b_{n-1}}$, $\forall n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$ şi se demonstrează inductiv că $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $b_n = \cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$. Folosind **d)** şi **f)** obținem, pentru $a = \frac{\pi}{4}$,

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdot\ldots\cdot\underbrace{\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}}_{n \text{ radicali}} = \frac{2}{\pi}.$$